

# “Sustainability of a firm’s market strategy”

## AUTHORS

Anatolii Voronin  <https://orcid.org/0000-0003-2570-0508>

Olga Gunko  <https://orcid.org/0000-0001-7013-5400>

Lidiia Afanasieva  <https://orcid.org/0000-0001-8113-4518>

## ARTICLE INFO

Anatolii Voronin, Olga Gunko and Lidiia Afanasieva (2020). Sustainability of a firm’s market strategy. *Economics of Development*, 19(4), 12-23.  
doi:[10.21511/ed.19\(4\).2020.02](https://doi.org/10.21511/ed.19(4).2020.02)

## DOI

[http://dx.doi.org/10.21511/ed.19\(4\).2020.02](http://dx.doi.org/10.21511/ed.19(4).2020.02)

## RELEASED ON

Tuesday, 29 December 2020

## RECEIVED ON

Saturday, 23 May 2020

## ACCEPTED ON

Thursday, 17 September 2020

## LICENSE



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## JOURNAL

"Economics of Development"

## ISSN PRINT

1683-1942

## ISSN ONLINE

2304-6155

## FOUNDER

Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics



NUMBER OF REFERENCES

**15**



NUMBER OF FIGURES

**6**



NUMBER OF TABLES

**0**

Anatolii Voronin (Ukraine), Olga Gunko (Ukraine), Lidiia Afanasieva (Ukraine)

# SUSTAINABILITY OF A FIRM'S MARKET STRATEGY

## Abstract

The work is focused on solving a set of problems related to the functioning of the enterprise (firm) in a competitive market environment. The stability of the firm in market conditions is determined by the ability to optimally manage available resources, effective planning for timely promotion of new products, the ability to adequately respond to challenges posed by sudden changes in market conditions. An important factor in achieving economic stability of the enterprise is the presence of the internal concept of self-development, which combines two main functions - marketing and management system (management). In this article the methodology of economic and mathematical modeling of a market condition of firm as process of interaction of functions of marketing and management has received the further development. A model is proposed, which is built in line with the paradigm of economic synergetics and is a system of two nonlinear ordinary differential equations. It is proved that in this situation the classical linear principle of superposition loses its relevance and does not allow the application of the traditional apparatus of econometric analysis. Therefore, the most important for the implementation of the practice of economic forecasting is the construction of areas of stability of the equilibrium of the firm. According to the results of the study, the emphasis is placed on the need to develop criteria for the proximity of system parameters to the dangerous limits of loss of stability by the firm, during the transition through which the economic system changes its dynamic mode catastrophically. A key place in the work is given to determining the parameters of cyclic processes, indicating the amplitude, frequency and nature of the stability of periodic trajectories. The presented results of numerical modeling have practical value and can be used for the analysis and forecasting of parameters at separate stages of the corresponding periodic modes of functioning of the enterprises with various types of stability.

## Keywords

firm stability, competitive market, marketing, management, limit cycle, self-oscillations, bifurcation

## JEL Classification

C62, D21, D92

A. В. Воронін (Україна), О. В. Гунько (Україна), Л. М. Афанас'єва (Україна)

# СТІЙКІСТЬ РИНКОВОЇ СТРАТЕГІЇ ФІРМИ

## Анотація

Робота орієнтована на вирішення комплексу проблем, пов'язаних з функціонуванням підприємства (фірми) в умовах конкурентного ринкового середовища. Стійкість функціонування фірми в ринкових умовах визначається можливостями оптимального управління наявними ресурсами, ефективним плануванням щодо своєчасного просування на ринок нової продукції, умінням адекватно реагувати на виклики, що породжуються раптовими змінами ринкової кон'юнктури. Важливим фактором досягнення економічної стабільності підприємства є наявність внутрішньофірмової концепції саморозвитку, що поєднує в собі дві основні функції – маркетингу і системи управління (менеджменту). У даній статті отримала подальший розвиток методологія економіко-математичного моделювання ринкового стану фірми, як процесу взаємодії функцій маркетингу і менеджменту. Запропоновано модель, яку побудовано в руслі парадигми економічної синергетики і являє собою систему двох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Доведено, що в зазначеній ситуації класичний лінійний принцип суперпозиції втрачає свою актуальність, та не дозволяє застосувати традиційний апарат економічного аналізу. Тому найбільш істотним для реалізації практики економічного прогнозування є побудова областей стійкості положень рівноваги фірми. За результатами дослідження зроблено акцент на необхідності вироблення критеріїв близькості параметрів системи до небезпечних меж втрати стійкості фірмою, при переході через які економічна система змінює свій динамічний режим катастрофічним чином. Ключове місце в роботі приділено визначенню параметрів циклічних процесів із зазначенням амплітуди, частоти і характеру стійкості періодичних траєкторій. Представлені результати чисельного моделювання мають практичну цінність і можуть бути використані для аналізу і прогнозування параметрів на окремих етапах відповідних періодичних режимів функціонування підприємств з різними типами стійкості.

## Ключові слова

стійкість фірми, конкурентний ринок, маркетинг, менеджмент, граничний цикл, автоколивання, біфуркація

## Класифікація JEL

C62, D21, D92



S. KUZNETS KHNUe



Founder

Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Nauky avenue, 9-A, Kharkiv, 61166, Ukraine

<http://www.hneu.edu.ua/>

Received on: 23rd of May, 2020

Accepted on: 17th of September, 2020

Published on: 29th of December, 2020

© Anatolii Voronin, Olga Gunko, Lidiia Afanasieva, 2020

Anatolii Voronin, Ph.D., Assistant Professor, Department of Higher Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Kharkiv National Economic University named after Simon Kuznets, Ukraine.

Olga Gunko, Assistant Professor, Department of Higher Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Kharkiv National Economic University named after Simon Kuznets, Ukraine.

Lidiia Afanasieva, Assistant Professor, Department of Higher Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Kharkiv National Economic University named after Simon Kuznets, Ukraine.



This is an Open Access article, distributed under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), which permits unrestricted re-use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

## ВСТУП

Головними факторами функціонування підприємства у сучасних умовах є наявність необхідних ресурсів, кваліфікованих управлінців, сучасних засобів виробництва, прогресивної технології та конкурентно-спроможної продукції. Стійкість функціонування поєднується як з необхідністю урахування динаміки змін зовнішнього ринкового середовища, так і з можливостями більш ефективного управління ресурсами підприємства та асортиментом випуску продукції. Існує низка факторів та заходів, які дозволяють підприємствам забезпечувати необхідну динамічну стійкість. Треба відзначити інноваційну діяльність у напрямку удосконалення виробничої технології для зменшення надлишкових втрат, створення нової продукції на відповідному ринку, вивчення нових потреб покупців з урахуванням демографічних, соціальних, економічних та політичних змін у державі і у світі у цілому, визначення ефективного розміру підприємства з точки зору ринкових потреб, розробка стратегії і тактики активного пристосування до вимог попиту потенційних споживачів з метою стабілізації або розширення частки підприємства у ринковому середовищі.

Фінансова стійкість підприємства (фірми) забезпечується функціонуванням усієї системи економічної діяльності, націленою на адаптацію до будь-яких зовнішніх викликів та створення стратегії саморозвитку за рахунок власної ініціативності. Також розгляд проблеми стійкості підприємств не є можливим без урахування часових змін, які характеризують динаміку розвитку фірми в умовах ринкового середовища.

## 1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

Проблему стійкості підприємства, її оцінки на основі системи економічних показників досліджували вчені різних країн світу. Насамперед, треба відзначити монографії Холта [5], Баканова [1] та Портера [9], де викладені теоретичні і методичні засади та підходи до ключових питань вищезазначених процесів. Серед вітчизняних дослідників звертають на себе увагу праці Ткачової [11], Кононенко [7], Сисоєвої [10], в яких досліджено фактори стійкості промислових підприємств з позиції конкурентних переваг в умовах дії сучасних ринкових відносин. У статті Гордеева [2] сформульовані ознаки стабільності підприємств в умовах конкурентної боротьби як складові питання економічної динаміки. Дана проблематика досліджувалась у статті Клебанової та ін. [6] і праці Гур'янової [3] за допомогою методології економетричного аналізу з відповідними аспектами процесів моделювання.

Слід зауважити, що в усіх вищезазначених наукових працях представлено достатній обсяг емпіричного матеріалу із зазначеної теми дослідження, але практично є відсутні відповідні математичні моделі, які пристосовані для аналізу стійкості динамічних процесів в економічних системах. Як виняток, можна назвати статтю Кузнецова і Фірсакової [8], де наведена модель нелінійної взаємодії функцій менеджменту та маркетингу у часовому просторі. Представлений математичний апарат в окремих аспектах отримав подальший розвиток у Вороніна [12, 13].

## 2. МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Полягає у отриманні за допомогою методології теорії динамічних систем умов параметричної стійкості моделі діяльності фірми з визначенням меж як безпечних так і небезпечних режимів функціонування досліджуваного об'єкту.

## 3. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі застосовується методологія дослідження систем нелінійної динаміки, концептуально орієнтована на використання парадигми економічної синергетики [14].

## 4. РЕЗУЛЬТАТИ

Стан підприємства (фірми) на споживчому ринку визначається якістю планування маркетингу та ефективною структурою внутрішнього управління підприємством. Керівництво фірми повинно час від часу переглядати стратегії маркетингу своєї продукції або реорганізувати систему прийняття

управлінських рішень, налаштовуючись на досягнутий рівень адаптації фірми до ринкового середовища (вплив конкуруючих структур, зміна соціально-економічних та політичних умов у суспільстві та міжнародній арені і т. д.). Звичайно, керівництво фірми іде на ці дії тільки у тих випадках, коли воно впевнено у стійкості стану фірми на споживчому ринку. Якщо ринкова кон'юнктура складається несприятливим чином і стан фірми втрачає стійкість, то актуальною стає проблема прогнозування майбутніх рівноважних станів фірми. Виникає питання - обов'язково буде стаціонарний стан рівноваги або реалізується стійкий циклічний режим? В останньому випадку може відбутися так, що ступінь адаптації фірми до ситуації, яка склалася на ринку, буде змінюватися у режимі автоколивань, періодичного руху відносно початкового, залишеного у минулому, стаціонарного рівноважного стану.

Припустимо, що діяльність фірми на споживчому ринку визначається двома функціями:  $x(t)$  - характеристика рівня адаптації до ринкової ситуації, залежної від прийнятого плану маркетингу (функція маркетингу у подальшому викладі);  $y(t)$  - є характеристикою управлінської структури, внутрішньофірмового менеджменту, яка визначає рівень корпоративної згуртованості керівництва та співробітників фірми для досягнення загальнофірмової мети (функція менеджменту). Зростання абсолютних значень  $|x|$  і  $|y|$  означає, відповідно, посилення стану фірми на ринку (успіх та реалізація тактичного та стратегічного планів маркетингу) або зріст рівня корпоративної згуртованості (вдала управлінська структура), а спадання цих змінних - послаблення позицій фірми на споживчому ринку (невдала реалізація тактичного і стратегічного планів маркетингу) або втрату корпоративної згуртованості (збурення внутрішньофірмових конфліктів).

Припустимо, що швидкість зміни функції маркетингу  $\dot{x}(t)$  визначається зворотною реакцією керівництва фірми на ринкову ситуацію у вигляді прийняття управлінських рішень заради виконання плану маркетингу  $f_x^1 = v_1 x$  та реакцією зворотного зв'язку, що являє собою ступінь взаємозалежності функцій менеджменту і маркетингу  $f_y^1 = v_2 y$ . Тоді маємо диференціальне рівняння:

$$\dot{x} = v_1 x + v_2 y, \quad (1)$$

де  $v_1, v_2$  - відносні параметри функцій маркетингу та менеджменту відповідно. З приводу маркетингового параметру  $v_1$ , треба відзначити, що коли  $v_1 < 0$ , це відповідає стратегії орієнтації на традиційну, яка користується стабільним попитом продукції фірми з виведенням на ринок її незначних модифікацій. В області  $v_1 > 0$  зростання значень цього параметру визначає іншу стратегію виведення у ринкове середовище якісно нової модифікації продукції фірми.

Далі, швидкість змінення функції менеджменту  $\dot{y}(t)$  визначається раніше введеною функцією  $f_y^1 = v_2 y$  і кількісною характеристикою інерції управлінських рішень (ступенем запізнювання реакції на них співробітників фірми -  $f_y^2 = -y \cdot \exp(-\alpha \cdot y)$ ), а також функцією обмежень, пов'язаних з оцінкою керівництвом фірми ринкових умов -  $f_x^2 = -x \cdot \exp(-\beta \cdot x)$ , таким чином:

$$\dot{y} = v_2 y - \exp(-\alpha \cdot y) - x \exp(-\beta \cdot x), \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \quad (2)$$

Вибір такої форми запису функцій  $f_y^2$  та  $f_x^2$ , обумовлений наступними обставинами. Чим вище рівень корпоративної згуртованості керівництва та співробітників ( $\alpha > 0$ ), тим менше це впливає на необхідність зміни функції менеджменту. Випадок  $\alpha = 0$  відповідає максимальному ступеню неузгодженості приймаємих керівництвом фірми рішень реальним діям співробітників, що потребує суттєвої перебудови системи прийняття управлінських рішень. Чим краще реальний стан фірми на споживчому ринку ( $\beta > 0$ ), тим менш це впливає на необхідність змін функцій менеджменту. У випадку  $\beta = 0$  має місце ситуація невідповідності оцінки керівництвом фірми її реального становища на ринку, що безумовно потребує кардинальних змін системи управління фірмою. Далі у наступному викладі будемо розглядати такі значення параметрів  $\alpha, \beta$ , для яких припустимі наближені рівності:

$$\exp(-\alpha \cdot y) \approx 1 - \alpha \cdot y, \quad \exp(-\beta \cdot x) \approx 1 - \beta \cdot x. \quad (3)$$

У такому випадку диференціальні рівняння (1) і (2) з урахуванням рівностей (3) складають наступну систему нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_1 x + v_2 y, \\ \dot{y} &= -x + (v_2 - 1)y + \beta \cdot x^2 + \alpha \cdot y^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо ліві частини (4) дорівнюють нулю, то легко отримати два особливих рішення системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \quad y_1^* = 0 - \text{тривіальний розв'язок;} \\ x_2^* &= \frac{v_2(v_2 + (v_2 - 1)v_1)}{\alpha v_1^2 + \beta v_2^2}, \quad y_2^* = -\frac{v_1}{v_2} x_2^* - \text{нетривіальний розв'язок.} \end{aligned}$$

Ці обидва розв'язки далі будемо іменувати, як відповідні рівноважні стани фірми у ринковому середовищі.

Розглянемо більш детально поведінку динамічної системи (4) у малому околі тривіального стану рівноваги  $x_1^* = 0, y_1^* = 0$ . У цьому випадку лінійна частина системи диференціальних рівнянь (4) має характеристичний багаточлен другого порядку:

$$\lambda^2 + (1 - v_1 - v_2)\lambda + v_1(v_2 - 1) + v_2 = 0, \quad (5)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2$  - для знаходження власних значень.

Для того, щоб система (4) була стійкою навколо тривіального рівноважного стану, потрібно виконання умови додатності усіх коефіцієнтів квадратного рівняння (5), тобто:

$$\begin{aligned} 1 - v_2 - v_1 &> 0, \\ v_1(v_2 - 1) + v_2 &> 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тип стійкості рівноваги при виконанні нерівностей (6) визначається дискримінантом квадратного рівняння (5):

$$D = (v_2 - v_1 - 1)^2 - 4v_2.$$

Якщо  $D \geq 0$ , то тривіальний рівноважний стан є стійким вузлом. У протилежному випадку має місце стійкий фокус.

Цікава ситуація спостерігається на лінії:

$$v_2 + v_1 - 1 + \mu = 0,$$

де  $\mu$  - малий знакозмінний параметр. У залежності від знаку параметру  $\mu$  у системі (4) може відбутися втрата або надбання стійкості, тобто стійкий фокус може стати нестійким і навпаки.

Виберемо параметр  $v_1$  у якості критичного для зміни стійкості (4):

$$v_1 = 1 - v_2 - \mu,$$

та виключимо цей маркетинговий параметр з квадратного рівняння (5):

$$\lambda^2 - \mu\lambda - v_2^2 + 3v_2 - 1 - (v_2 - 1)\mu = 0. \quad (7)$$

Введемо позначення:

$$\omega^2(\mu) = \omega_0^2 - (v_2 - 1)\mu, \quad \omega_0^2 = -v_2^2 + 3v_2 - 1.$$

Припускаємо, що  $\omega_0^2 > 0$  за умовою  $-v_2^2 + 3v_2 - 1 > 0$ . Так відбудеться, якщо параметр менеджменту  $v_2$  задовольняє нерівність:

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < v_2 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \tag{8}$$

З урахуванням того, що параметр  $\mu$  є малим, отримаємо розв'язок (7) у нових позначеннях:

$$v_{1,2}(\mu) = \frac{\mu}{2} \pm i \left( \omega_0 - \frac{\mu}{2} \frac{v_2 - 1}{\omega_0^2} \right), \quad i^2 = -1. \tag{9}$$

При цьому існує похідна  $\lambda(\mu)$ , якщо  $\mu=0$ :

$$\lambda'(0) = \frac{1}{2} - \frac{v_2 - 1}{2\omega_0^2} \cdot i. \tag{10}$$

Цей факт означає, що при зміні знака  $\mu$  дійсна частина  $\lambda(\mu)$  також змінює свій знак і перетинає дійсну вісь комплексної площини з ненульовою швидкістю. Такий тип фокусу називається повільним. Таким чином, усі умови біфуркаційної теореми Хопфа виконані і має місце біфуркація народження граничного циклу з відповідним автоколивальним режимом [4, 15].

Для обчислення основних характеристик граничного циклу, таких як амплітуда, частота і період коливаль, а також для визначення стійкості періодичних рішень, нам необхідно знайти нормальну форму системи диференціальних рівнянь відповідно до системи (4).

Введемо більш простіші позначення для параметрів (4)  $k=v_2-1$ ,  $\omega=\omega_0$  та при  $\mu=0$  отримаємо нову форму системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = -kx + (k + 1)y, \\ \dot{y} = -x + ky + \alpha \cdot y^2 + \beta \cdot x^2. \end{cases} \tag{11}$$

Заради побудови нормальної форми для системи (11) зробимо заміни  $x=k \cdot x_1 + x_2$ ,  $y=x_1$ . Після необхідних перетворень маємо систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega \cdot x_2 + (\alpha + \beta \cdot k^2)x_1^2 + 2\beta \cdot k\omega \cdot x_1 \cdot x_2 + \beta \cdot \omega^2 \cdot x_2^2 \\ \dot{x}_2 = \omega \cdot x_1 - \frac{k}{\omega}(\alpha + \beta \cdot k^2) \cdot x_1^2 - 2\beta \cdot k^2 \cdot x_1 \cdot x_2 - \beta \cdot k \cdot \omega \cdot x_2^2 \end{cases} \tag{12}$$

Систему (12), яка вже є нормальною формою Пуанкаре [4], зручно представити у вигляді одного комплексного диференціального рівняння першого порядку відносно змінної  $z=x_1+i \cdot x_2$ :

$$\dot{z} = i\omega \cdot z + g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11}z \cdot \bar{z} + g_{02} \cdot \frac{\bar{z}^2}{2}, \tag{13}$$

де  $\bar{z} = x_1 - i \cdot x_2$  - є спряженою змінною.

Комплексно значні параметри  $g_{20}$ ,  $g_{11}$ ,  $g_{02}$  визначаються за допомогою формул:

$$g_{20} = \frac{1}{2} \left( \alpha - \beta \cdot (k^2 + \omega^2) - i \frac{k}{\omega} (\alpha + \beta \cdot (k^2 + \omega^2)) \right),$$

$$g_{11} = \frac{1}{2} (\alpha + \beta \cdot (k^2 + \omega^2)) \left( 1 - i \frac{k}{\omega} \right),$$

$$g_{02} = \frac{1}{2} \left( \alpha + \beta \cdot (3k^2 - \omega^2) - i \frac{k}{\omega} (\alpha + \beta \cdot (k^2 - 3\omega^2)) \right).$$

У результаті обчислення першої ляпуновської величини  $l_1(0) = \text{Re}l_1(0) + i \text{Im}l_1(0)$  отримано вирази для дійсної і уявної частини відповідно:

$$\text{Re}l_1(0) = \frac{(\alpha + \beta(k+1))\alpha k}{4\omega^2},$$

$$\text{Im}l_1(0) = -\frac{1}{12\omega^3} (\alpha^2(3k^2 + 2k + 2) + 5\alpha\beta(k+1)^2(k^2 + k + 1) + 5\beta^2(k+1)^3).$$

Для нас є важливим знак дійсної частини  $l_1(0)$ . Від цього залежить стійкість періодичного автоколивального режиму. Пам'ятаючи про те, що  $k = v_2 - 1$ , тоді згідно з нерівністю (8) параметр  $k$  знаходиться у межах:

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < k < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Таким чином, спостерігається зміна знаку параметру  $k$  і можна зробити висновок, якщо має місце нерівність:

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < k < 0,$$

то граничний цикл є стійким. У випадку:

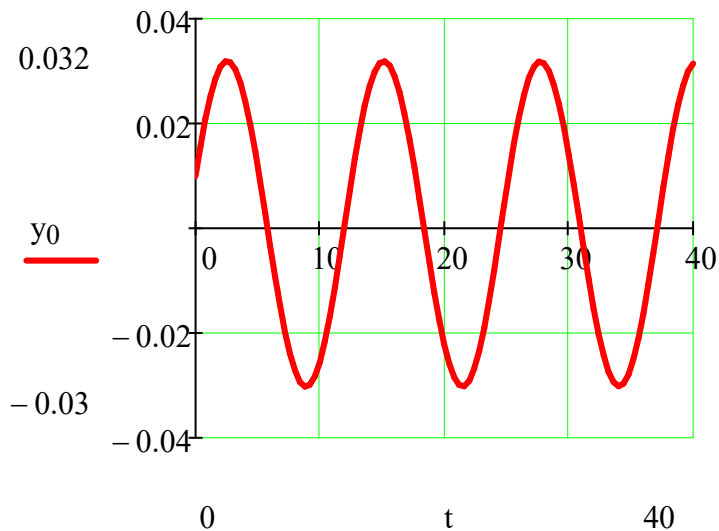
$$0 < k < \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

маємо нестійкий періодичний режим.

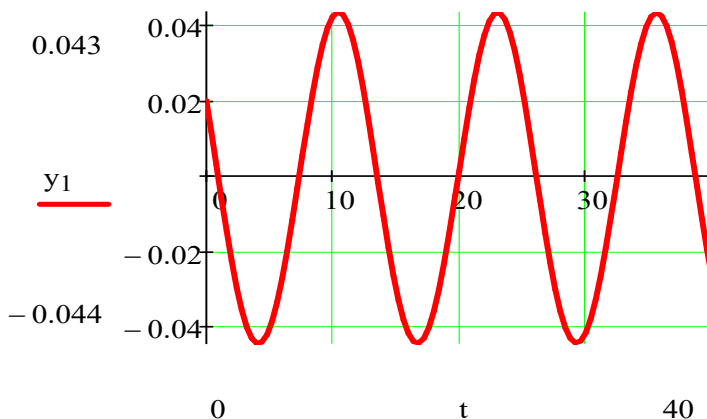
Вочевидь, значення  $v_2 = 1$  параметру менеджменту визначає напрямок стійкості граничного циклу. Коли  $v_2 < 1$ , цикл є стійким і автоколивальний режим вважається м'яким. З іншого боку, якщо  $v_2 > 1$ , отримуємо жорсткий режим виникнення періодичних процесів з катастрофічною втрапою стійкості.

На Рисунку 1 і 2 надані чисельні результати моделювання динамічної системи (11) з параметрами  $\alpha = 0.3$ ;  $\beta = 0.4$ ;  $x_0 = 0.01$ ;  $y_0 = 0.02$ ;  $k = -0.5$ . Від'ємне значення  $k = -0.5$  відповідає структурним обмеженням стійкого граничного циклу. На Рисунку 1 і 2 відображені функції маркетингу  $x(t)$  та менеджменту  $y(t)$ . Рисунок 3 є ілюстрацією фазового портрету граничного циклу у змінних  $y(t)$  та  $x(t)$ .

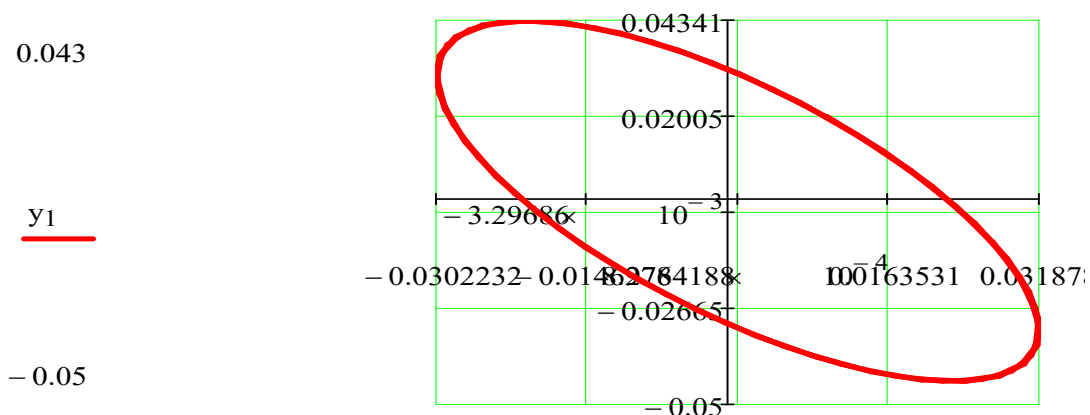
Рисунки 4, 5, 6 є результатом моделювання характеристик нестійкості граничного циклу з параметрами  $k = 0.5$  (інші числові значення незмінні).



**Рисунок 1.** Коливальний режим функції маркетингу  $x(t)$

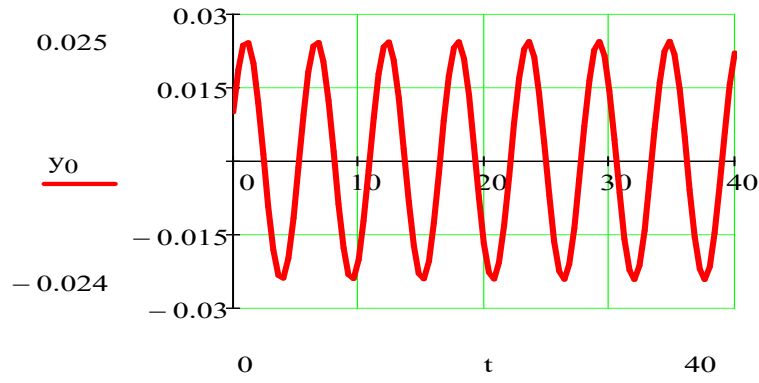


**Рисунок 2.** Коливання функції менеджменту  $y(t)$

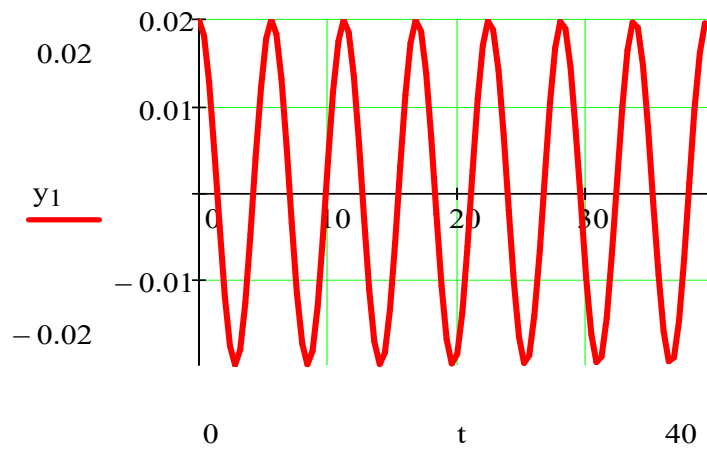


**Рисунок 3.** Фазовий портрет стійкого граничного циклу у змінних  $x$  та  $y$ .  $K = -0.5$

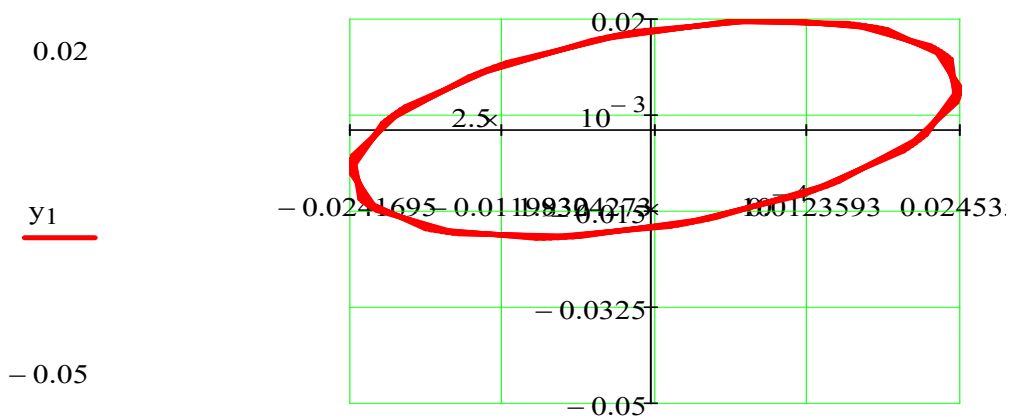
Рисунки 4-6 є результатом моделювання характеристик нестійкості граничного циклу з параметрами  $k=0.5$  (інші числові значення незмінні).



**Рисунок 4.** Коливальний режим функції маркетингу  $x(t)$



**Рисунок 5.** Коливання функції менеджменту  $y(t)$



**Рисунок 6.** Фазовий портрет нестійкого граничного циклу у змінних  $x$  та  $y$ .  $k = 0.5$

Існування нестійкого граничного циклу доводить, що орієнтація у плані маркетингу на традиційну продукцію фірми при просуванні на ринок її незначної модифікації з'являється нестійкий автоколивальний режим періодичних змін функцій маркетингу та менеджменту відносно розглянутого рівноважного стану системи (4) і (11). При цьому рольове значення зовнішніх факторів (ринкового стану), тобто внесення збурень у систему, полягає в тому, що вони можуть вибити її зі стійкого стану рівноваги за межу області стійкості. Далі, перетин межі  $\mu=0$  відповідає зникненню області стійкості усередині нестійкого граничного циклу. Відповідні точки траєкторії «зриваються» з рівноважного стану і зникають за межу розглянутого окола цього стану. Важливо, що при зворотній зміні управляючого маркетингового параметру ці точки не повертаються у стан рівноваги, тобто спроба відмовитися від впровадження на ринок нової продукції шляхом повернення стратегії постачання традиційної продукції вже не забезпечує рівноважний стан фірми на споживчому ринку. Процес еволюції економічної системи має незворотній гістерезисний характер.

Це може означати, що стан фірми на споживчому ринку після її «зриву» при  $\mu=0$  може перейти до іншого стійкого стаціонарного стану рівноваги (успішне впровадження нової продукції) або до стрибкоподібного, катастрофічного переходу до своєрідного режиму усталеного руху, який якісно відрізняється від стану стаціонарної рівноваги і строго періодичних автоколивань – стан динамічної невизначеності. Перехід фірми на такий режим функціонування означає, що в ній відбуваються складні квазіперіодичні коливання, механізм яких є дуже чутливим до малих збурень початкових умов (діям релевантних факторів зовнішнього оточення), тоді як у цей час усереднені характеристики стану фірми достатньо стійкі. Такий процес діяльності фірми може бути названим турбулентним. Дійсно, якщо  $\mu=0$  граничний цикл «пристає» до стану рівноваги, який є складним (повільним) нестійким фокусом.

Нами досить докладно проаналізована проблема стійкості граничного циклу при усіх значеннях параметру менеджменту, окрім  $\nu_2=1$  ( $k=0$ ). Сам по собі факт зміни стійкості граничного циклу в околі критичного значення параметру  $\nu_2=1$  викликає підозру у напрямку існування вторинної біфуркації Хопфа, при якій можуть одночасно існувати два граничних цикла – стійкий та нестійкий.

Нехай  $k = 0$ . Тоді система (11) приймає вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \beta x^2 + \alpha y^2 \end{cases} \quad (14)$$

Виключимо часову змінну і перепишемо (14) у вигляді диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \beta x^2 + \alpha y^2}{y}. \quad (15)$$

Рівняння (15) може бути явним чином проінтегроване відносно функції  $y^2(x)$ :

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2dy^2 + 2(\beta x^2 - x). \quad (16)$$

Диференціальне рівняння (16) є лінійним і має достатньо очевидний розв'язок:

$$y^2 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{2(\beta - \alpha)x}{2\alpha^2} + \frac{\beta - \alpha}{2\alpha^3} = C \cdot e^{2\alpha x}, \quad (17)$$

де  $C$  - довільна стала, залежна від початкових умов  $x_0, y_0$ .

Якщо підібрати  $x_0, y_0$  таким, що  $C=0$ , тоді отримаємо:

$$\alpha \cdot y^2 + \beta \cdot x^2 + \frac{2\beta - \alpha}{2\alpha} x + \frac{\beta - \alpha}{2\alpha^2} = 0, \quad (18)$$

Рівняння (18) є еліпсом, оскільки  $\alpha$  і  $\beta$  є додатні, тобто мають однаковий знак.

Перетворимо (18) до вигляду:

$$y^2 + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \left( x + \frac{1}{2} \left( \frac{2\beta - \alpha}{\alpha\beta} \right) \right)^2 = \gamma^2, \quad (19)$$

де число  $\gamma > 0$  існує, якщо  $\frac{\beta}{\alpha} < 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ . Таким чином, система (14) має перший інтеграл і є по суті консервативною. Тому біфуркація двократного циклу у такій системі не може існувати. Якщо підставити (19) у перше рівняння системи (14), то з'явиться диференціальне рівняння першого порядку для  $x(t)$ .

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\gamma^2 - \frac{\beta}{\alpha} \left( \delta + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \right) \right)^2}, \quad (20)$$

Рівняння (20) є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремленими змінними і має розв'язок:

$$x(t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \right) + \gamma \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} t + K^* \right), \quad (21)$$

$$\text{де } K^* = \arcsin \left( x_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \right) \right).$$

Користуючись формулою (19), маємо:

$$y(t) = \gamma \cos \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} t + K^* \right), \quad (22)$$

Задаючи різні початкові умови  $x_0$  є можливість знайти безліч розв'язків консервативної системи (14). На цьому біфуркаційна поведінка системи (4) з характеристичним рівнянням (5) не вичерпується. Якщо припустити, що коефіцієнти квадратного рівняння (5) можуть незалежно один від одного змінювати знаки, то будемо вважати їх малими величинами в околі нуля:

$$\begin{aligned} v_2 + v_1 - 1 &= \mu_2, \\ v_1(1 - v_2) - v_1 &= \mu_1, \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\mu_1, \mu_2$  – малі знакозмінні величини.

У такому випадку маємо незалежність управляючих параметрів функцій маркетингу та менеджменту. У такому форматі система (4) була розглянута у роботі [13].

Якщо у (23) прирівняти нулю праві частини, то легко знайти розв'язок для критичних значень параметрів  $v_1, v_2$ :

$$v_1^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad v_2^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \quad (24)$$

Вочевидь, що розв'язки для  $v_1^*, v_2^*$  у (24) зв'язані співвідношенням «золотого перерізу».

З урахуванням малих параметрів  $\mu_1, \mu_2$  знайдемо вирази для  $v_1, v_2$  із системи алгебраїчних рівнянь (23):

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1^* + \frac{1}{\sqrt{5}} \mu_1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \mu_2, \\ v_2 &= v_2^* - \frac{1}{\sqrt{5}} \mu_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \mu_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Введемо позначення відхилень параметрів маркетингу і менеджменту від своїх критичних значень  $v_1 = v_1^* - v_1$ ,  $v_2 = v_2^* - v_2$  і вирахуємо з (25) малі параметри  $\mu_1, \mu_2$ . Після необхідних перетворень маємо формули:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2, \\ \mu_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tilde{v}_1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \tilde{v}_2. \end{aligned} \quad (26)$$

У [3] зазначено, що система (4) топологічно еквівалентна наступній системі:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ u_2 &= q^2 \mu_1 u_1 + q \mu_2 u_2 + u_1^2 + u_1 u_2, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{де } q = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \left( 1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

У системі (27) відбувається біфуркація Богданова-Такенса «двократного нуля» [12], властивості якої будуть розглянуті далі.

За наявності дослідження топологічних властивостей системи (27) у роботі [13] є повний біфуркаційний аналіз на площині малих параметрів  $\mu_1, \mu_2$ . Вважаємо доцільним розглянути дані висновки у термінах  $v_1, v_2$ . У результаті перетворень отримаємо:

1. Лінія сідло-вузлової біфуркації  $F = \left\{ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) : \tilde{v}_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \tilde{v}_1 \right\}$ .
2. Лінія біфуркації Хопфа  $H = \left\{ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) : (2-q(\sqrt{5}+1))\tilde{v}_2 + (2+q(\sqrt{5}-1))\tilde{v}_1 = 0 \right\}$ .
3. Лінії глобальної гомоклітичної біфуркації  $P = \left\{ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) : (7+3(\sqrt{5}-1)q)\tilde{v}_1 + (7-3(\sqrt{5}+1)q)\tilde{v}_2 = 0 \right\}$ .

Таким чином, нами встановлено, що у малому околі критичних значень параметрів маркетингу  $v_1^*$  та менеджменту  $v_2^*$  динамічна система (4) демонструє складну поведінку з відповідним каскадом змін стійкості рівноважного стану.

## ВИСНОВКИ

Важливість дослідження параметрів стійкості нелінійної динамічної системи за допомогою методології синергетичної економіки не викликає ніяких сумнівів. Отримані результати щодо аналізу стійкості моделі ринкового становища фірми підтверджують складність поведінкових властивостей досліджуваного об'єкту. Своєчасне й адекватне інформування про управляючі параметри функцій маркетингу та менеджменту, забезпечують стійкість екологічних процесів по відношенню до зовнішніх збурень, що дозволяє відпрацьовувати ефективні стратегії щодо недопущення потрапляння фірми у небезпечні межі областей параметричної стійкості та реалізувати комплекс управлінських заходів з запобігання катастроф у майбутньому. Реалізація усіх зазначених заходів сприятиме своєчасній адаптації внутрішньофірмовій системі управління до викликів мінливостей економічних реалій.

## AUTHORS CONTRIBUTIONS

Conceptualization: Anatolii Voronin.  
 Data curation: Olga Gunko, Lidiia Afanasieva.  
 Formal Analysis: Anatolii Voronin.  
 Funding acquisition: Anatolii Voronin.  
 Investigation: Anatolii Voronin.  
 Methodology: Anatolii Voronin.  
 Resources: Olga Gunko, Lidiia Afanasieva.  
 Software: Olga Gunko.  
 Validation: Lidiia Afanasieva.  
 Visualization: Olga Gunko.  
 Writing – original draft: Olga Gunko.  
 Writing – review & editing: Lidiia Afanasieva.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bakanov, M. (2002). *Teoriya ekonomicheskogo analiza [Economic analysis theory]* (416 p.). Moskva: Finansyi i statistika. (In Russian)
2. Gordeev, V. (2013). Konkurentsiya i ee dinamika v zerkale teoreticheskoy ekonomiki [Competition and its dynamics in the mirror of theoretical economics]. *Theoretical Economy*, 6, 18-25. (In Russian)
3. Guryanova, L., Klebanova, T., & Gvozdytskiy, V. (2015). Econometric modeling of the financial regulation mechanism in regional development. *Actual problems of economics*, 11(173), 408-421. Retrieved from <https://cutt.ly/dg1HGdP>
4. Hassard, B., Kazarinoff, N., & Wan, I. (1981). *Theory and Applications of the Hopf Bifurcation* (280 p.). Cambridge: Cambridge University Press.
5. Holt, R. (2004). *Osnovni finansovogo menedzhmenta [Fundamentals of Financial Management]* (876 p.). Moskva: Delo. (In Russian)
6. Klebanova, T., Guryanova, L., & Shevchenko, I. (2014). Model basis of early warning and localization of crises in economic system of territories. *Actual problems of economics*, 3, 269-278. Retrieved from [http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape\\_2014\\_3\\_36](http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape_2014_3_36)
7. Kononenko, G. (2016). Concept of market competitive edge: traditional and innovative aspects. *Global and National Problems of Economy*, 11, 392-395. (In Ukrainian). Retrieved from <http://global-national.in.ua/issue-11-2016/19-vipusk-11-cherven-2016-r/2129-kononenko-g-i-rinkova-kontsepsiya-konkurentnikh-perevag-traditsijnij-i-innovatsijnij-aspekti>
8. Kuznetsov, V., & Firsakova, V. (2000). Ob ustoychivosti rynochnogo polozheniya firmy [On the stability of the market position of the company]. *Economics and Mathematical Methods*, 3, 136-139. (In Russian)
9. Porter, M. (1998). *Competitive Advantage: Creating and Sustaining Superior Performance* (624 p.). NY: Free Press.
10. Syisoeva, E. (2011). Konkurentnyye preimushchestva predpriyatiya: evolyutsiya i istochniki formirovaniya [Competitive advantages of the enterprise: evolution and sources of formation]. *Economic and Law Issues*, 5, 47-51. (In Russian)
11. Tkachova, S. (2012). Suchasna kontsepsiia stiikykh konkurentnykh perevah pidpriyemstva: intehratsiia ta sbalansuvannia naukovykh pidkhodiv [The modern concept of sustainable competitive advantages of the enterprise: integration and balancing of scientific approaches]. *Scientific notes of Taurida National V.I. Vernadsky University, series «Economy and Management»*, 25(64), 160-168. (In Ukrainian)
12. Voronin, A. (2006). *Tsikly v zadachah nelineynoy makroekonomiki [Cycles in problems of nonlinear macroeconomics]* (136 p.). Kharkiv: INZhEK. (In Russian)
13. Voronin, A. (2007). Strukturnaya nestabilnost rynochnoy pozitsii firmy [Structural instability of a firm's market position]. *Business Inform*, 6, 67-71. (In Russian)
14. Zang, W. (1991). *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics* (246 p.). Berlin: Springer-Verlag. Retrieved from <https://www.springer.com/gp/book/9783642759116>
15. Zoladek, H. (1995). The Cyclicity of Triangles and Segments in Quadratic Systems. *Journal of Differential Equations*, 122(1), 137-159. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1995.1142>